

Сингулярное разложение SVD: главный фокус линейной алгебры

Геометрическая идея

Возьмём любую матрицу A размера $m \times n$ и применим её к единичному кругу в $\mathbb{R}^n$ (то есть к множеству всех векторов x с $\|x\|=1$, где $\|\cdot\|$ — обычная евклидова длина). Что получится в $\mathbb{R}^m$?

⚠ Теорема 0.2. Сингулярное разложение (SVD)

Для любой вещественной матрицы A размера $m \times n$ существует разложение

$$A = U \Sigma \bar{V} \quad (1)$$

где

- U — ортогональная матрица $m \times m$ (поворот в $\mathbb{R}^m$);
- V — ортогональная матрица $n \times n$ (поворот в $\mathbb{R}^n$);
- Σ — «диагональная» матрица $m \times n$ с неотрицательными числами $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ на диагонали (и нулями ниже), где $r = \text{rank } A$.

Числа σ_i называются **сингулярными числами** матрицы A .

Содержательно (0.1) говорит: *любая линейная операция* — это три простых действия подряд:

$$\underbrace{\bar{V}}_{\text{поворот в исходном пространстве}} \rightarrow \underbrace{\Sigma}_{\text{растяжение по координатным осям}} \rightarrow \underbrace{U}_{\text{поворот в новом пространстве}} \quad (2)$$

Геометрически это значит: образ единичной сферы под действием A — это **эллипсоид**, у которого полуоси равны $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ (см. рис. 0.1).

⚠ Рисунок

Рисунок `fig:svd-ellipse` не сгенерирован:
C:\Users\712\AppData\Local\MiKTeX\miktex\log\miktex-maketfm.log

Рис. 0.1. SVD геометрически. Матрица A переводит единичный круг в эллипс, полуоси которого равны сингулярным числам σ_1, σ_2 , а направления полуосей — столбцы матрицы U (левые сингулярные векторы). Векторы v_1, v_2 (столбцы V , правые сингулярные векторы) — это те направления в исходном пространстве, которые A переводит в полуоси эллипса.

Связь с собственными значениями

Сингулярные числа — это, по сути, переодетые собственные значения. А именно:

$$\bar{A}A = (U\Sigma\bar{V})(U\Sigma\bar{V}) = V\bar{\Sigma}\Sigma\bar{V}. \quad (3)$$

Матрица $\bar{\Sigma}\Sigma$ — диагональная, на её диагонали стоят $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots$. Значит, σ_i^2 — это собственные значения симметричной матрицы $\bar{A}A$, а столбцы V — её собственные векторы. Эта формула важна нам по двум причинам: (1) она обосновывает существование SVD (через известную спектральную теорему для симметричных матриц), (2) она будет рабочим инструментом в § 0.5, когда мы будем вычислять собственные лица.

💡 Историческая справка

Сингулярное разложение независимо открыли итальянский математик *Эудженио Бельтрами* (1873 г.) и француз *Камилл Жордан* (1874 г.). В современном виде, как разложение прямоугольной матрицы, его сформулировал *Карл Эккарт* с *Гейлом Янгом* в 1936 г. Численно надёжный алгоритм вычисления SVD появился лишь в 1965 г. (Голуб и Кахан) — и стал одним из ключевых алгоритмов XX века. Сегодня он реализован в любой математической библиотеке: `numpy.linalg.svd`, `scipy.linalg.svd`, `torch.svd`.